

CAPÍTULO V: Ecuaciones Reducibles a Cuadráticas

Ejercicio Introductorio. Pedro y Marisol compraron un terreno rectangular de dimensiones $18m$ y $24m$. Harán la construcción de su casa por partes. En la primera etapa quiere reservar un cuadrado en una de las esquinas del terreno para que quede como patio. Quieren que el patio tenga la tercera parte del área del terreno. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado que deben reservar?

Las ecuaciones que se pueden reducir a la forma $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, se llaman **ecuaciones cuadráticas**.

Para simplificar el estudio, dividimos en los siguientes casos:

A. Ecuaciones cuadráticas incompletas

I CASO: $c = 0$ Para resolver ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$, se debe factorizar el lado izquierdo y utilizar el principio del producto nulo.

Para resolver estas ecuaciones, en muchas ocasiones es sencillo aplicar el siguiente principio:

Principio del producto nulo: Si el producto de dos expresiones es igual a cero, entonces alguna de ellas debe ser igual a cero.

Es decir, si $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ o bien $b = 0$

EJEMPLO 1. Resuelva $5x^2 - \frac{3x}{2} = 0$

También, tenemos otro caso que se resuelve sencillamente despejando, pero es importante recordar que para cualquier real positivo, existen dos reales que al cuadrado dan ese número.

II CASO: $b = 0$ Para resolver ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$, se debe despejar la variable tomando en cuenta las posibilidades del signo.

EJEMPLO 2. Resuelva

a) $4x^2 - 9 = 0$

b) $(x + 2)^2 = 4x$

c) $x^2 = \sqrt[5]{25}$

d) $4x^2 - 0,25 = 0$

Soluciones A.

EJEMPLO 1: Resuelva $5x^2 - \frac{3x}{2} = 0$

PASO 1) La ecuación es equivalente a: $\frac{10x^2 - 3x}{2} = 0 \Rightarrow 10x^2 - 3x = 0$

PASO 2) Sacando el factor común: $x(10x - 3) = 0$

PASO 3) Aplicando el principio del producto nulo: $x = 0$ o bien $10x - 3 = 0 \Rightarrow 10x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{10}$

PASO 4) Se escribe el conjunto solución: $S = \left\{ 0, \frac{3}{10} \right\}$

► Una observación importante es que en este caso siempre 0 va a pertenecer al conjunto solución.

EJEMPLO 2: Resuelva a) $4x^2 - 9 = 0$

PASO 1) Despejando x^2 tenemos: $4x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4}$

PASO 2) Para despejar x se extrae raíz cuadrado a ambos lados: $\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{9}{4}}$

PASO 3) Se debe tomar en cuenta que hay dos posibles soluciones: $x = \pm \frac{3}{2}$

PASO 4) Se escribe el conjunto solución: $S = \left\{ \frac{-3}{2}, \frac{3}{2} \right\}$

► Esta ecuación también se puede resolver igualando a 0, factorizando el lado izquierdo y utilizando el principio del producto nulo, de la siguiente manera:

$$4x^2 = 9 \Rightarrow \underbrace{4x^2}_{2x} - \underbrace{9}_{3} = 0 \Rightarrow (2x - 3)(2x + 3) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \text{ ó } 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ ó } x = \frac{-3}{2}$$

b) $(x + 2)^2 = 4x$

PASO 1) Expandiendo: $x^2 + 4x + 4 = 4x$

PASO 2) Despejando x^2 tenemos: $x^2 + \cancel{4x} + 4 = \cancel{4x} \Rightarrow x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4$

PASO 3) Observando que un número real elevado al cuadrado nunca es negativo, obtenemos que: $S = \emptyset$

► Recuerde, que el conjunto vacío se puede escribir \emptyset o bien $\{ \}$ pero nunca $\{ \emptyset \}$

c) $x^2 = \sqrt[5]{25}$

PASO 1) Aplicando el procedimiento visto: $x = \pm \sqrt[5]{\sqrt[5]{25}}$

PASO 2) Ahora, simplificamos el radical y factorizamos el subradical: $x = \pm \sqrt[10]{5^2}$

PASO 3) Por último, podemos simplificar el índice con el exponente: $x = \pm \sqrt[10]{5^2} \Rightarrow x = \pm \sqrt[5]{5}$

PASO 4) Escribimos el conjunto solución: $S = \{-\sqrt[5]{5}, \sqrt[5]{5}\}$

d) $4x^2 - 0,25 = 0$

PASO 1) Convertimos el decimal a fracción: $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

PASO 2) Despejamos de la ecuación: $4x^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow 4x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{\frac{1}{4}}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{16}$

PASO 3) Luego, resolvemos: $x^2 = \pm \sqrt{\frac{1}{16}} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{4}$

PASO 4) El conjunto solución es: $S = \left\{ -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right\}$

Ejercicio A. Resuelva las siguientes ecuaciones

1. $x(x-3) = 0$

2. $2x^2 + 10x = 0$

3. $x^2 = 49$

4. $16x^2 = 1$

5. $\frac{9x^2 - 25}{2} = 0$

6. $(2x-1)^2 = 1$

7. $16x^2 + 9 = 0$

8. $75 - x^2 = 0$

9. $(3x-2)^2 = (5x-2)^2$

10. $3x^2 = 81$

11. $-8 - 2x^2 = 0$

12. $x^2 = \sqrt{2}$

13. $x^2 - \frac{1}{5} = 0$

14. $-x^2 + 0,1 = 0$

15. $3x^2 = -0,3x$

16. $\sqrt{3}x^2 = \sqrt{6}x$

17. $x^2 = \sqrt[3]{25}$

18. $x^2 = \sqrt[3]{-49}$

19. $(x-\sqrt{2}) \cdot 5x = 0$

20. $3\sqrt{3}x^2 = 1$